Delay Gleichungen

Theorie:

Wie in der Vorlesung besprochen, ist es in der Natur oft einfacher eine Zustandsgrösse mittels seiner zeitlichen Änderung zu beschreiben statt mit der Grösse selbst. Beispiele dafür sind die Newtongleichungen die den Ort mittels der Beschleunigung beschreiben.

Bei manchen Phänomenen treten aber verzögerte Effekte auf, zum Beispiel verzögert die Geschlechtsreifzeit der Neugeborenen die Entwicklung einer Population. Solche Verzögerungen lassen sich mit gewöhnlichen DGLs nicht gut beschreiben; Delay-Gleichungen (DDE) sind hingegen sehr geeignet da sie mittels einem Parameter τ diese zeitliche Verzögerung ausdrücken können.

$$y'(t) = -\boldsymbol{\mu} y(t) + f\big(y(t-\boldsymbol{\tau})\big) \tag{1}$$

Wobei τ und μ konstant sind.

Aufgaben:

a) Man betrachtet hier ein Fall von Populationswachstums, daher kann man leicht erkennen, dass μ der Sterberate entspricht (im Allgemeinen einem Dämpfungsfaktor, der der Steigung entspricht). τ hingegen ist eben unser Verzögerungsfaktor, der aussagt wie lange man «warten» muss um die Effekte eines Phänomens zu sehen.

b) Um zu zeigen, dass $\tau = 1$ keine Einschränkung ist, kann man eine Substitution durchführen; somit ergibt sich für unsere y'(t) folgendes:

$$\tilde{t} = \frac{t}{\tau} \rightarrow \; y'(t) = \frac{d\hat{y}}{d\tilde{t}} \cdot \frac{d\tilde{t}}{dt} = \hat{y}'(\tilde{t}) \cdot \frac{1}{\tau}$$

Durch Einsetzen erhält man:

$$\hat{y}'(\tilde{t}) \cdot \frac{1}{\tau} = -\mu y(\tilde{t} \cdot \tau) + f\big(y\big(\tau(\tilde{t} - 1)\big)\big)$$

Ersetzt man noch y durch $\hat{y}$ wie oben angegeben, erhält man

$$\hat{y}'(\tilde{t}) \cdot \frac{1}{\tau} = -\mu \hat{y}(\tilde{t}) + f(\hat{y}(\tilde{t} - 1))$$

Der Faktor $\frac{1}{\tau}$ kann man durch Multiplikation mit τ loswerden, und dabei entsteht die ursprüngliche DDE.

$$\hat{y}'(\tilde{t}) = -\hat{\mu}\hat{y}(\tilde{t}) + \hat{f}(\hat{y}(\tilde{t} - 1)$$

Daraus erkennt man, dass man unabhängig von der Wahl von τ jede Gleichung dieser Art auf eine der Form y(t-1) bringen kann.

Wir wollen jetzt ein konkretes Anfangswertproblem für $t \in [0,1]$ mit Gleichung (1) lösen. Dazu setzen wir $\tau = 1$ und nehmen folgende Funktion f:

$$f(y) = \begin{cases} -1, & y < 0 \\ +1, & y \geq 0. \end{cases}$$

Jetzt fehlt noch der Anfangswert y_0, wir nehmen

$$y_0(t) = t, \qquad \text{wobei } t \in [-1, 0].$$

c) Die Funktion y_0 ist eine endliche Anzahl an Punkten die im Intervall $t \in [-1, 0]$ existieren; diese stellen einen «Anfangswert» dar im Sinne, dass diese die Werte sind auf die unsere Gleichung zurückgreifen muss um überhaupt definiert zu sein. Insbesondere: damit die Funktion f(y(t-1)) in [0,1] definiert ist, muss sie auf Werte die genau der Funktion y_0 entsprechen zurückgreifen. Allgemein muss das Anfangsintervall mindestens so gross wie τ sein.

d) Lösung der Differentialgleichung

Nach dem Einsetzen der Anfangsbedingungen erhält man somit die DGL:

$$y'(t) = -\mu y(t) - 1$$

Diese kann mittels Separierung gelöst werden:

$$\frac{dy}{dt} = -\mu y - 1$$

$$\frac{dt}{dy} = \frac{1}{-\mu y - 1}$$

$$\int dt = \int -\frac{1}{\mu y + 1} dy$$

$$t + C = -\frac{1}{\mu} \ln(\mu y + 1)$$

$$Ae^{-\mu t} = \mu y + 1$$

$$y(t) = Be^{-\mu t} - \frac{1}{\mu}$$

Die Funktion muss stetig sein. Also wenn für $y_0(0)=0$ in [- 1;0] gilt, muss auch für $y(0)=0$ in [0;1] gelten. Damit kann man B bestimmen. Und zwar muss $B = \frac{1}{\mu}$ sein. Die Lösung ist somit:

$$y(t) = \frac{1}{\mu}e^{-\mu t} - \frac{1}{\mu}$$